Concours des 25, 26 et 27 mai 1981 d'admission en 1ère année à l'INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
(Options M.P.T.)

***

MATHEMATIQUES

(à distribuer aux candidats)

PROBLEME n° 1

L'espace affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé direct d'origine O et d'axes Ox, Oy, Oz. Un point de l'espace pourra être défini par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou par ses coordonnées semi-polaires d'axe Oz telles que :

$$x = r \cos \theta \; ; \; y = r \sin \theta.$$

On donne deux vecteurs $\vec{R}$ et $\vec{G}$ de composantes respectives (0, 0, R) et (0, 0, G). A tout point M de l'espace, on fait correspondre le vecteur $\vec{MH} = \vec{G} + \vec{R} \wedge \vec{OM}$. On appelle (C) toute courbe susceptible d'être définie comme ensemble des points M dont les coordonnées sont des fonctions dérivables d'un paramètre et telle que, quel que soit le point M, le vecteur $\vec{MH}$ soit normal en M à la courbe.

A - 1°) Démontrer qu'il existe, entre les coordonnées cartésiennes (x, y, z) d'un point M décrivant une courbe (C) et leurs différentielles (dx, dy, dz) la relation R(x dy - y dx) + G dz = 0. Cette relation est-elle caractéristique des courbes (C) ? Que devient cette relation en coordonnées semi-polaires ?

2°) Que peut-on dire des courbes (C) lorsque l'un des vecteurs $\vec{R}$ ou $\vec{G}$ est nul ? Dorénavant on supposera que les deux vecteurs $\vec{R}$ et $\vec{G}$ sont différents de zéro et l'on posera G = - KR.

B - Parmi les courbes (C) existent des droites, que l'on désigne par (D).

1°) Montrer que les droites (D) passant par un point donné $A(x_o, y_o, z_o)$ appartiennent toutes à un plan P_A passant par A dont on donnera une équation.

Etudier, de façon analogue, les droites (D) parallèles à une direction (Δ) ayant pour paramètres directeurs (α, β, γ) et préciser quand elles existent.

2°) Etudier les droites (D) situées dans un plan donné.

C - On appelle (Γ) toute courbe telle que le plan osculateur en l'un quelconque, M, de ses points coupe l'axe Oz en un point ayant même cote que le point M. On rappelle que le plan osculateur en M à une courbe définie paramétriquement est le plan contenant le point M et les deux premiers vecteurs dérivés non nuls sauf peut-être en des points isolés.

1°) Démontrer que toute courbe (C) est une courbe (Γ). Quelle relation existe-t-il entre le plan osculateur en un point M d'une courbe (C) et le vecteur $\vec{MH}$ d'une part, entre ce plan osculateur et le plan P_M défini dans la 1ère question de la partie B d'autre part ?

2°) Peut-on donner de toute courbe (Γ) une définition analogue à la définition des courbes (C), à partir d'un torseur convenablement choisi ?

N.B - Les démonstrations purement géométriques seront les bienvenues.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

PROBLEME n° 2

Soit f une fonction réelle de classe C^∞ (c'est-à-dire ayant des dérivées de tout ordre) sur $\mathbb{R}$. On lui associe la fonction réelle φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^{+x} f(t)\,dt \text{ si } x \neq 0 \text{ et } \varphi(0) = f(0) .$$

1°) Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$

2°) Déterminer φ dans les cas suivants :

$f(t) = t\,e^t$; $\quad f(t) = \dfrac{t-1}{t^2 - t + 1}$; $\quad f(t) = \dfrac{1}{1 + \sin^2 t}$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$

3°) Etudier la parité de φ

4°) La correspondance $f \longmapsto \varphi$ définit une application J de l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ dans l'ensemble $\mathcal{P}_o$ des fonctions paires, définies et continues sur $\mathbb{R}$. Montrer que J est linéaire. Quel est son noyau ? Montrer que pour tout élément de $\mathcal{E}$ il existe une fonction paire et une seule, $\hat{f}$, appartenant à $\mathcal{E}$ telle que $J(f) = J(\hat{f})$.

5°) Montrer que φ est un élément de C^∞. On pourra introduire la fonction $G : x \longmapsto \int_0^x \hat{f}(t)\,dt$. Exprimer $\varphi^{(n)}(0)$ ($\varphi^{(n)}$ dérivée nième de φ) en fonction de $f^{(n)}(0)$ ($f^{(n)}$ dérivée nième de f).

6°) Montrer que l'application J restreinte à $\mathcal{P} = \mathcal{P}_o \cap \mathcal{E}$ est une bijection de $\mathcal{P}$ sur lui-même.

7°) On suppose que f a une dérivée seconde positive ou nulle, montrer que φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

PROBLEME n° 3

DEFINITIONS ET NOTATIONS

n est un entier fixe $\geqslant 3$. Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) des matrices colonnes d'ordre n à termes $\in \mathbb{C}$ (dim $\mathcal{E}$ = n).

A l'entier quelconque k, compris entre 1 et n on associe la matrice colonne d'ordre n dont le $k^{ième}$ terme (la numérotation étant faite de haut en bas) est 1 et dont les autres termes sont nuls. On la désigne par e_k.

Dans $\mathcal{E}$ on considère les matrices colonnes fixes

$$A = \sum_{k=1}^{n} e_k \quad \text{et} \quad B = \sum_{k=1}^{n} k\, e_k$$

A la matrice colonne quelconque $X = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k$ on associe les scalaires $f(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k$ et $g(X) = \sum_{k=1}^{n} k x_k$

On désigne par Ω la matrice carrée d'ordre n de terme général $\omega_{i,j} = i + j - 1$.

(i = numéro de la ligne $\in [1, n]$; j = numéro de la colonne $\in [1, n]$).

QUESTIONS

1°) Calculer f(A), f(B), g(A), g(B) (Indication $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

2°) p étant un entier quelconque $\in [1, n]$ trouver le $p^{ième}$ terme de la matrice-colonne

$\Omega X + [f(X) - g(X)] A - f(X) B$ en fonction de n, p et des n nombres x_k tels que $\sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k = X$.

3°) a - Trouver la dimension de l'espace image de $\mathcal{E}$ par Ω c'est-à-dire de l'ensemble $\Omega\,\mathcal{E}$ des matrices colonnes ΩX associées à toutes les matrices colonnes X de $\mathcal{E}$.

b - Démontrer que 0 est une valeur propre de Ω et trouver la dimension du sous-espace propre qui lui est associé.

4°) Calculer les nombres t et λ tels que $\Omega(tA + B) = \lambda\,(tA + B)$

Trouver tous les couples (t, λ) possibles.

5°) a - Trouver toutes les racines du polynôme caractéristique φ de Ω et préciser, pour chacune son ordre de multiplicité.

b - Ecrire sous forme développée (calculer chaque coefficient) le déterminant $\varphi(s)$ de la matrice $\Omega - sI$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail